DR

Marion Gremillet
Actuaire au sein d'Actuaris International

DR

Esterina Masiello
Maître de conférences à l'Isfa (Institut de science financière et d'assurances)

Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo : une révolution pour l'évaluation des engagements des assureurs IARD ?

L'évaluation des engagements des assureurs sous Solvabilité II représente en moyenne 79,4 % de leur passif[1]. Pour les organismes assureurs non-vie, elle est très majoritairement basée sur l'étude d'un triangle représentant le déroulement des règlements des assureurs, en fonction de l'année comptable et de l'année de survenance du sinistre sous-jacent. L'objectif pour l'actuaire consiste alors à « compléter » ce triangle, c'est-à-dire à évaluer les sinistres des années comptables futures.

Les méthodes classiques, dont la fameuse méthode dite de « *Chain Ladder* », consistent à évaluer, colonne par colonne, les éléments du triangle inférieur à partir des données du triangle supérieur. Si l'on prend le cas de *Chain Ladder* en particulier, basé sur l'estimation d'un facteur de « développement » d'une colonne à l'autre, on se rend vite compte que les estimations réalisées sur les premières colonnes comportent de nombreuses données pour évaluer peu de points, à l'inverse des colonnes de droite qui comportent peu de données pour évaluer de nombreux points, ce qui semble contre-intuitif et induit une erreur d'estimation importante.

C'est de ce constat que part la recherche à propos de la méthode dite « *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo* » (RJMCMC), proposée par Verrall et Wüthrich en 2010.

La méthode consiste en effet à appliquer deux modèles différents : l'un à gauche du triangle, basé sur plus de paramètres, ce qui lui permettra de mieux s'ajuster aux données ; et l'autre à droite du triangle, basé sur deux paramètres à estimer seulement, ce qui permet d'avoir plus de robustesse dans l'évaluation, les dernières colonnes correspondant au déroulé de sinistres déjà survenus et pouvant ainsi plus facilement s'ajuster à un modèle paramétrique simple. Toute la problématique consiste alors à savoir à partir de quelle limite l'un ou l'autre des deux modèles s'applique : et c'est à cette problématique que la méthode RJMCMC apporte une solution, certes complexe, mais à n'en pas douter pragmatique.

En effet, dans un cadre bayésien, les données elles-mêmes apporteront la réponse, ce qui évitera un choix arbitraire de ce seuil.

La méthode RJMCMC est basée sur l'utilisation combinée d'algorithmes ayant fait leurs preuves dans les domaines de la biologie et de la physique numériques :

- l'approche bayésienne ;
- les chaînes de Markov pour l'aspect itératif ;
- l'approche Monte-Carlo pour la simulation des limites des deux modèles (notées k par la suite) ;
- le rééchantillonnage de Gibbs pour obtenir la distribution des modèles à gauche de la limite k ;
- l'algorithme de Metropolis-Hasting pour estimer les paramètres du modèle à droite de la limite k.

Il convient de coordonner ces différentes approches à travers un modèle et un logiciel comportant une puissance suffisante pour lancer le million de simulations requises, au minimum.

Le principe du modèle est résumé brièvement ci-après.

L'hypothèse fondatrice de la méthode suppose que les valeurs incrémentales notées $X_{i,j}, 0 \leq i,j \leq I$ sont distribuées selon une loi de Poisson sur-dispersée : $\left(\frac{X_{ij}}{\varphi}\middle|\vartheta\right) \sim Poi(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi})$ où φ correspond au paramètre de dispersion et $\vartheta = \{\mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_I, \varphi\}$ représente le vecteur des paramètres à estimer.

Les paramètres des lignes μ_i sont modélisés par une loi gamma :

$$\forall i \in \{0, \dots, I\} \quad \mu_i \sim \Gamma(s, \frac{s}{m_i})$$

Quant aux paramètres des colonnes γ_j, nous distinguons deux cas :

- jusqu'à l'indice de troncature k, ils sont modélisés par une loi gamma :

$$\forall j \in \{0, \dots, k-1\} \quad \gamma_j \sim \Gamma(v, \frac{v}{c_j})$$

Novatrice, la méthodologie *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo* pourrait présenter une alternative réelle aux méthodes traditionnelles d'évaluation des provisions techniques en assurance non-vie.

- au-delà de l'indice de troncature, une loi de queue de distribution est définie :

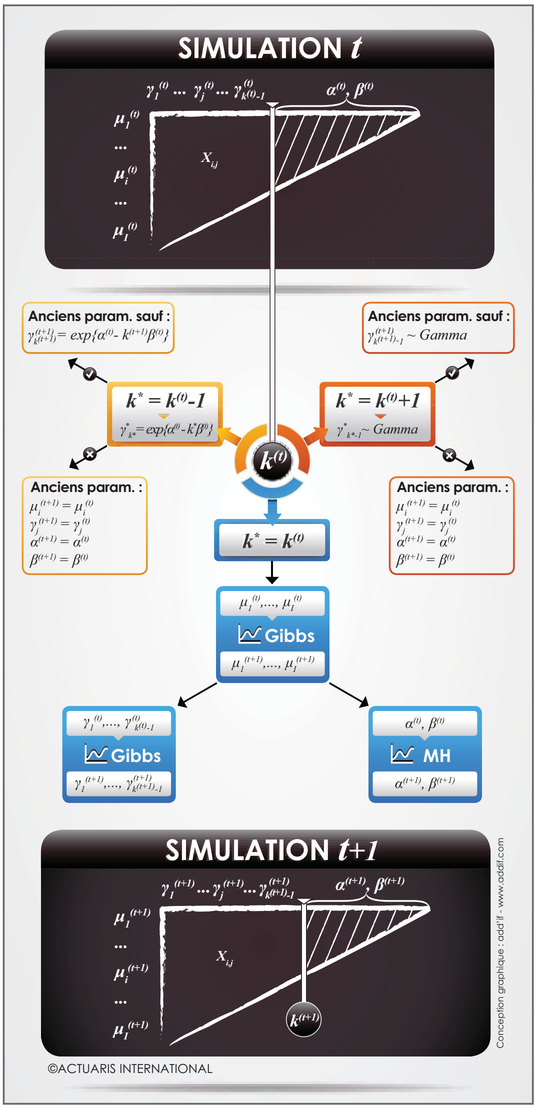
$$\forall j \in \{k, \dots, I\} \quad \gamma_j = \exp(\alpha - j\beta)$$

Les paramètres α et β étant des variables aléatoires gaussiennes.

La première étape du cœur de l'algorithme consiste à choisir un nouveau k^* à partir du $k^{(t)}$de l'état précédent. Pour cela, nous utilisons une loi uniforme qui permettra d'obtenir les valeurs $k^{(t)}-1$, $k^{(t)}$, $k^{(t)}+1$ avec des probabilités $\frac{1}{3}$.
Si $k^* \neq k^{(t)}$, l'algorithme RJMCMC consiste à proposer une nouvelle valeur pour l'unique γ_j qui se trouve migré d'un modèle à l'autre, tandis que les valeurs des autres paramètres restent inchangées par rapport à l'état précédent de la chaîne de Markov. Cette valeur proposée peut alors être acceptée ou rejetée ; dans ce dernier cas, la valeur retenue est celle de l'état précédent.
Si $k^* = k^{(t)}$, l'algorithme de RJMCMC consiste à rafraîchir les paramètres bloc par bloc. Dans un premier temps, les μ_I sont rafraîchis en utilisant le rééchantillonnage de Gibbs, il en est ensuite de même pour les γ_j qui utiliseront les nouvelles valeurs des μ_I. Enfin, les paramètres α et β seront mis à jour par l'algorithme de Metropolis-Hastings.
Dans chaque cas, nous obtenons ainsi un nouveau vecteur de paramètres.

Le schéma ci-contre présente, pour une itération donnée, le fonctionnement général de l'algorithme de RJMCMC.
En s'appuyant sur des algorithmes complexes basés sur Monte-Carlo, la méthodologie implique un grand nombre de simulations. En général, un certain nombre de simulations est nécessaire avant que l'algorithme ne se stabilise, cette phase de recherche de la distribution stationnaire, appelée phase de « *burn-in* », est à exclure pour l'interprétation des résultats afin d'éviter de les perturber.
L'estimation du paramètre de *burn-in* optimal peut être définie visuellement, à partir de l'étude du graphe

Fonctionnement général de l'algorithme de RJMCMC



sur l'indice de troncature (voir ci-dessous), représentant l'évolution de k. Nous obtenons alors une distribution générale des provisions de la forme présentée dans le graphique sur la fonction de densité. L'écart-type (et donc l'incertitude liée à l'estimation de la provision de l'assureur) obtenu est nettement inférieur à celui des méthodes stochastiques usuelles de Thomas Mack et du Bootstrap par exemple, comme l'illustre le tableau comparatif, sur la base d'un triangle-type de déroulé de règlements en assurance automobile.

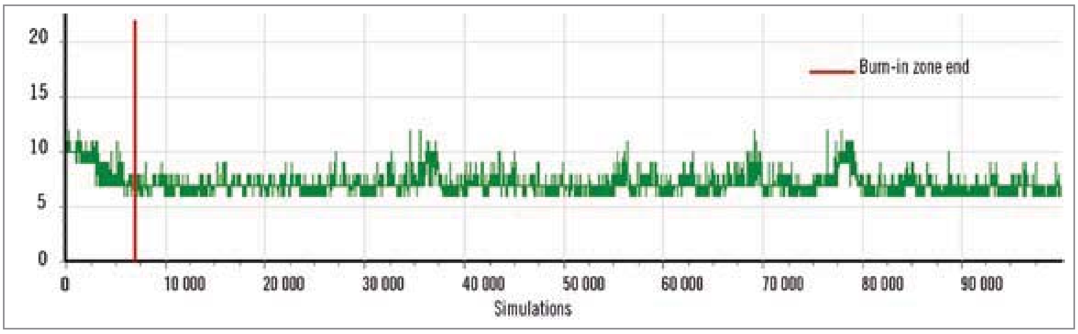
La méthodologie est entièrement nouvelle, et donc encore pas, ou très peu, utilisée par les organismes assureurs : il est peut-être un peu tôt pour affirmer qu'elle révolutionne enfin l'indétrônable méthode de *Chain Ladder*, en particulier parce qu'elle fait intervenir un grand nombre de simulations, ce qui rend son interprétation plus difficile. La seconde limite de la méthode est qu'elle est basée sur le modèle de Poisson sur-dispersé, qui fait intervenir un grand nombre de paramètres.

Les premiers résultats obtenus semblent néanmoins prometteurs, dans un contexte où l'évaluation des provisions techniques est d'un impact stratégique capital pour les assureurs.

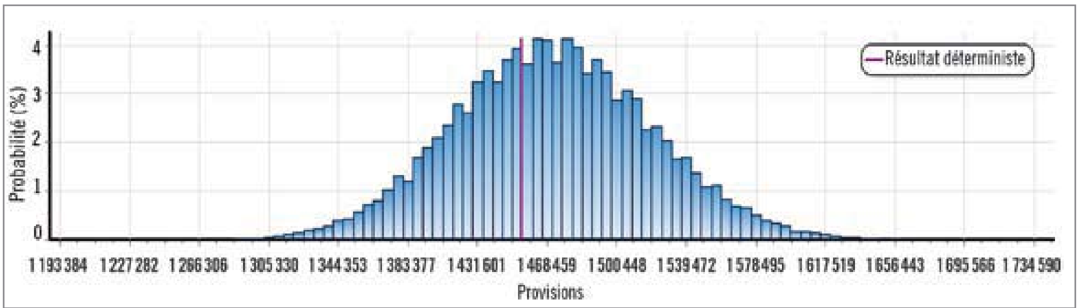
Marion Gremillet et Esterina Masiello

1. Source : résultats QIS 5 présentés lors de la conférence de l'ACP du 27 avril 2011

Indice de troncature (K)



Fonction de densité



Comparaison sur la base d'un triangle-type de déroulé de règlements en assurance automobile

		Bootstrap		*Chain Ladder* / Mack	
	Résultats obtenus avec RJMCMC	Résultats	Comparatif	Résultats	Comparatif
Moyennes des réserves	1 470 316	1 458 835	0,79 %	1 463 057	0,50 %
Écarts types des réserves	54 878	60 063	- 8,14 %	55 176	- 0,54 %

Quelques références bibliographiques :

Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo, R. J. Verrall, M. W. Wüthrich, *North American Actuarial Journal,* (2010)

Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, T. Mack, ASTIN, 23, 2 (1993)

Monte Carlo Sampling Using Markov Chains and Their Applications, W. K. Hastings, Biometrika (1970)

Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, P. Green, Biometrika (1995)